

Homework 4 - Itô Integral

1. 设 f 为二次连续可微函数，证明：

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

2. 计算： $\int_0^t B_s^2 dB_s$

3. 计算： $\int_0^t e^{B_s} dB_s$

4. 令 $H \in \mathcal{L}_T^2$ ，证明：随机过程

$$\eta_t \triangleq \left(\int_0^t H_s dB_s \right)^2 - \int_0^t H_s^2 ds$$

为一个 \mathcal{F}_t 鞅。

5. 设 $(B_t)_{t \geq 0}$ 为一个标准布朗运动，用Itô公式证明： $\exp(cB_t - \frac{c^2}{2}t)$ 是一个鞅。

6. 设 X 和 Y 为两个Itô过程。证明

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t.$$

等价地，有如下分部积分公式

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s \cdot dY_s.$$

Hint: 对 $f(x, y) = xy$ 应用Itô公式